4章　微分方程式

§2　2階微分方程式　(p.107〜p.125)

問 1

（1）　$x = C_1e^t + C_2e^{-t}$ より

$\frac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1e^t + C_2e^{-t} = x$

また，2個の任意定数を含むから，一般解である．

（2）　$\frac{dx}{dt} = ce^{2t} \cdot 2 = 2ce^{2t}$

$x = ce^{2t}$ より，$c = \frac{x}{e^{2t}}$

よって

$\frac{dx}{dt} = \frac{2xe^{2t}}{e^{2t}}$

$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = 2x}$

問 2

（1）　$x = e^{2t}$ とおく．

$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 4e^{2t}$

これらを方程式に代入すると

左辺 $= 4e^{2t} - 5 \cdot 2e^{2t} + 6e^{2t}$

$= 4e^{2t} - 10e^{2t} + 6e^{2t} = 0$

よって，$x = e^{2t}$ は与えられた微分方程式の解である．

同様に，$x = e^{3t}$ とおく．

$\frac{dx}{dt} = 3e^{3t}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 9e^{3t}$

これらを方程式に代入すると

左辺 $= 9e^{3t} - 5 \cdot 3e^{3t} + 6e^{3t}$

$= 9e^{3t} - 15e^{3t} + 6e^{2t} = 0$

よって，$x = e^{3t}$ は与えられた微分方程式の解である．

（2）　$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$ とおく．

$\frac{dx}{dt} = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 4C_1e^{2t} + 9C_2e^{3t}$

これらを方程式に代入すると

左辺 $= (4C_1e^{2t} + 9C_2e^{3t}) - 5(2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t})$

$+ 6(C_1e^{2t} + C_2e^{3t})$

$= (4 - 10 + 6)C_1e^{2t} + (9 - 15 + 6)C_2e^{3t} = 0$

よって，$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$ は与えられた微分方程式の解である．

問 3

（1）　$(e^{2t})' = 2e^{2t}$

$(e^{3t})' = 3e^{3t}$

よって

$$W(e^{2t},\ e^{3t}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{vmatrix}$$

$= 3e^{5t} - 2e^{5t}$

$= e^{5t} \fallingdotseq 0$

したがって，関数 e^{2t}，e^{3t} は線形独立である．

（2）　$(t^n)' = nt^{n-1}$

$(t^m)' = mt^{m-1}$

よって

$$W(t^n,\ t^m) = \begin{vmatrix} t^n & t^m \\ nt^{n-1} & mt^{m-1} \end{vmatrix}$$

$= mt^{n+m-1} - nt^{n+m-1}$

$= (m - n)t^{n+m-1}$

$n \fallingdotseq m$ であるから，$(m-n)t^{n+m-1}$ が恒等的に 0 になることはない．

したがって，関数 t^n，t^m は線形独立である．

問 4

（1）　$x = \cos t$ とおく．

$\frac{dx}{dt} = -\sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$

よって

左辺 $= -\cos t + \cos t = 0 =$ 右辺

したがって，$x = \cos t$ は与えられた微分方程式の解である．

同様に，$x = \sin t$ とおく．

$\frac{dx}{dt} = \cos t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin t$

よって

左辺 $= -\sin t + \sin t = 0 =$ 右辺

したがって，$x = \cos t$ は与えられた微分方程式の解である．

また

$$W(\cos t,\ \sin t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$= \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \fallingdotseq 0$

以上より，$\cos t$ と $\sin t$ は線形独立な解である．

（2）　$\cos t$ と $\sin t$ は与えられた微分方程式の線形独立な解であるから，一般解は

$\boldsymbol{x = C_1 \cos t + C_2 \sin t}$　(C_1，C_2は任意定数)

問 5

（1）　$x = e^t$ とすると，　$\frac{dx}{dt} = e^t$，$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t$ であるから

左辺 $= e^t + e^t = 2e^t =$ 右辺

よって，e^t は，与えられた微分方程式の解である．

（2）　問 4 より，斉次の場合の解が

$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

また，非斉次の場合の 1 つの解が，$x = e^t$ であるから，一般解は

$\boldsymbol{x = e^t + C_1 \cos t + C_2 \sin t}$　　(C_1，C_2は任意定数)

問 6

（1）　特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda = 0$ を解くと

$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda = 2,\ 4$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

（2） 特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 8 = 0$ を解くと

$\lambda(\lambda + 3) = 0$

$\lambda = 0,\ -3$

よって，一般解は

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{0t} + C_2 e^{-3t} \\ &= \boldsymbol{C_1 + C_2 e^{-3t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数}) \end{aligned}$$

（3） 特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ を解くと

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda = 3$ （重解）

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}} (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

（4） 特性方程式 $\lambda^2 + 3 = 0$ を解くと

$\lambda^2 = -3$

$\lambda = \pm\sqrt{3}\, i$

よって，一般解は

$$\begin{aligned} x &= e^{0t}(C_1 \cos\sqrt{3}\, t + C_2 \sin\sqrt{3}\, t) \\ &= \boldsymbol{C_1 \cos\sqrt{3}\, t + C_2 \sin\sqrt{3}\, t} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数}) \end{aligned}$$

（5） 特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ を解くと

$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 2,\ -1$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

（6） 特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

問 7

（1） 特性方程式 $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$ を解くと

$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\lambda = 1,\ -6$

よって，一般解は

$x = C_1 e^t + C_2 e^{-6t}$ $(C_1,\ C_2$は任意定数$)\cdots$①

また，$\dfrac{dx}{dt} = C_1 e^t - 6C_2 e^{-6t} \cdots$②

①に，$t = 0,\ x = 0$ を代入して，$0 = C_1 + C_2$

②に，$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 7$ を代入して，$7 = C_1 - 6C_2$

よって

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 6C_2 = 7 \end{cases}$$

これを解いて，$C_1 = 1,\ C_2 = -1$

したがって，求める解は

$$\boldsymbol{x = e^t - e^{-6t}}$$

（2） 特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 1 \cdot 10}}{1} \\ &= 3 \pm i \end{aligned}$$

よって，一般解は

$x = e^{3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ $(C_1,\ C_2$は任意定数$)\cdots$①

また

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3e^{3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ &\quad + e^{3t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) \\ &= e^{3t}\{(3C_1 + C_2)\cos t + (-C_1 + 3C_2)\sin t\} \end{aligned}$$

$\cdots$②

①に，$t = 0,\ x = 0$ を代入して，$0 = C_1$

②に，$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 7$ を代入して，$7 = 3C_1 + C_2$

よって

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 3C_1 + C_2 = 7 \end{cases}$$

これを解いて，$C_1 = 0,\ C_2 = 7$

したがって，求める解は

$$\boldsymbol{x = 7e^{3t} \sin t}$$

問 8

（1） 右辺は 1 次式で，x の係数は 0 ではないから，$\boldsymbol{x = At + B}$ と予想する．

（2） $x = At + B$ より

$\dfrac{dx}{dt} = A,\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$0 + 2A - 8(At + B) = 4t - 3$

$-8At + (2A - 8B) = 4t - 3$

よって

$$\begin{cases} -8A = 4 \\ 2A - 8B = -3 \end{cases}$$

これを解いて，$A = -\dfrac{1}{2},\ B = \dfrac{1}{4}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}$$

〔別解〕 （微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$(D^2 + 2D - 8)x = 4t - 3$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2 + 2D - 8}(4t - 3)$$

山辺の方法を用いると

$$\begin{array}{r|l} & -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ \hline -8 + 2D + D^2 & 4t - 3 \\ & 4t - 1 \\ \hline & -2 \\ & -2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって，$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}}$

〔または〕

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2+2D-8}(4t-3) \\
&= \frac{1}{(D-2)(D+4)}(4t-3) \\
&= \frac{1}{-2\cdot\left(1-\dfrac{D}{2}\right)\cdot 4\left(1+\dfrac{D}{4}\right)}(4t-3) \\
&= -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{D}{2}\right)}\left(1-\frac{D}{4}+\cdots\right)(4t-3) \\
&= -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{D}{2}\right)}\left\{(4t-3)-\frac{1}{4}\cdot 4\right\} \\
&= -\frac{1}{8}\left(1+\frac{D}{2}+\cdots\right)(4t-4) \\
&= -\frac{1}{8}\left\{(4t-4)+\frac{1}{2}\cdot 4\right\} \\
&= -\frac{1}{8}(4t-2) \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

問 9

$x=Ae^{2t}$ と予想すると

$$\frac{dx}{dt}=2Ae^{2t},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=4Ae^{2t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
4Ae^{2t}-2\cdot 2Ae^{2t}+5Ae^{2t}&=e^{2t} \\
5Ae^{2t}&=e^{2t}
\end{aligned}
$$

よって，$5A=1$ であるから，$A=\dfrac{1}{5}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{5}e^{2t}}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-2D+5)x=e^{2t}$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2-2D+5}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2^2-2\cdot 2+5}e^{2t} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{5}e^{2t}}
\end{aligned}
$$

問 10

$x=A\cos t+B\sin t$ と予想すると

$$\frac{dx}{dt}=-A\sin t+B\cos t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-A\cos t-B\sin t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&-A\cos t-B\sin t-5(-A\sin t+B\cos t) \\
&\qquad\qquad +6(A\cos t+B\sin t)=\sin t \\
&-A\cos t-B\sin t+5A\sin t-5B\cos t \\
&\qquad\qquad +6A\cos t+6B\sin t=\sin t \\
&(5A-5B)\cos t+(5A+5B)\sin t=\sin t
\end{aligned}
$$

よって

$$\begin{cases}5A-5B=0\\ 5A+5B=1\end{cases}$$

これを解いて，$A=\dfrac{1}{10}$，$B=\dfrac{1}{10}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-5D+6)x=\sin t$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2-5D+6}\sin t \\
&= \frac{1}{(D-2)(D-3)}\sin t \\
&= \frac{(D+2)(D+3)}{(D^2-4)(D^2-9)}\sin t \\
&= \frac{(D+2)(D+3)}{(-1-4)(-1-9)}\sin t \\
&= \frac{1}{50}(D+2)(D+3)\sin t \\
&= \frac{1}{50}(D+2)(\cos t+3\sin t) \\
&= \frac{1}{50}(-\sin t+3\cos t+2\cos t+6\sin t) \\
&= \frac{1}{50}(5\cos t+5\sin t) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t}
\end{aligned}
$$

問 11

（1）　特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+6=0$ を解くと，$\lambda=2,\ 3$ であるから，e^{3t} は斉次の場合の一般解に含まれる．

よって，$x=Ate^{3t}$ と予想する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=A(e^{3t}+3te^{3t})=A(1+3t)e^{3t} \\
\frac{d^2x}{dt^2}&=A\{3e^{3t}+(1+3t)\cdot 3e^{3t}\}=3A(2+3t)e^{3t}
\end{aligned}
$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
3A(2+3t)e^{3t}-5A(1+3t)e^{3t}+6Ate^{3t}&=e^{3t} \\
Ae^{3t}&=e^{3t}
\end{aligned}
$$

よって，$A=1$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=te^{3t}}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-5D+6)x=e^{3t}$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2-5D+6}e^{3t} \\
&= \frac{1}{(D-3)(D-2)}e^{3t} \\
&= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{D-2}e^{3t}\right) \\
&= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{3-2}e^{3t}\right) \\
&= \frac{1}{D-3}e^{3t} \\
&= e^{3t}\frac{1}{(D+3)-3}e^{-3t}e^{3t} \\
&= e^{3t}\frac{1}{D}1=\boldsymbol{te^{3t}}
\end{aligned}
$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2+9=0$ を解くと，$\lambda=\pm 3\,i$ であるから，$\cos 3t$ は斉次の場合の一般解に含まれる．

よって，$x=t(A\cos 3t+B\sin 3t)$ と予想する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (A\cos 3t+B\sin 3t) \\
&\qquad +t(-3A\sin 3t+3B\cos 3t) \\
&= (A+3Bt)\cos 3t+(-3At+B)\sin 3t
\end{aligned}
$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3B\cos 3t - 3(A+3Bt)\sin 3t$$
$$- 3A\sin 3t + 3(-3At+B)\cos 3t$$
$$= (-9At+6B)\cos 3t - (6A+9Bt)\sin 3t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$(-9At+6B)\cos 3t - (6A+9Bt)\sin 3t + 9t(A\cos 3t + B\sin 3t) = \cos 3t$$
$$6B\cos 3t - 6A\sin 3t = \cos 3t$$

よって，$6A=0$，$6B=1$ であるから，$A=0$，$B=\dfrac{1}{6}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{6}t\sin 3t}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2+9)x = \cos 3t$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2+9}\cos 3t = \frac{1}{D^2+3^2}\cos 3t = \frac{1}{2\cdot 3}t\sin 3t = \boldsymbol{\frac{1}{6}t\sin 3t}$$

問 12

（1）　特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと，$\lambda = 1,\ 2$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{2t} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x = Ae^{3t}$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = 3Ae^{3t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 9Ae^{3t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$9Ae^{3t} - 3\cdot 3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = 4e^{3t}$$
$$2Ae^{3t} = 4e^{3t}$$

よって，$2A=4$ より，$A=2$

したがって，1 つの解は

$$x = 2e^{3t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = 2e^{3t} + C_1e^t + C_2e^{2t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-3D+2)x = 4e^{3t}$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2-3D+2}4e^{3t} = \frac{4}{3^2-3\cdot 3+2}e^{3t} = \frac{4}{2}e^{3t} = 2e^{3t}$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ を解くと，$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}\,i$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = e^t(C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t)$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x = At^2 + Bt + C$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = 2At + B$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2A$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$2A - 2(2At+B) + 3(At^2+Bt+C) = 3t^2 - t$$
$$3At^2 + (-4A+3B)t + (2A-2B+3C) = 3t^2 - t$$

よって

$$\begin{cases} 3A = 3 \\ -4A+3B = -1 \\ 2A-2B+3C = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$A=1$，$B=1$，$C=0$

したがって，1 つの解は

$$x = t^2 + t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = t^2 + t + e^t(C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t)}$$

（C_1，C_2は任意定数）

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-2D+3)x = 3t^2 - t$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2-2D+3}(3t^2-t)$$

山辺の方法を用いると

$$\begin{array}{r|l} & t^2 \quad + t \\ \hline 3 - 2D + D^2 & 3t^2 \quad - t \\ & 3t^2 \ - 4t \ + 2 \\ \hline & \quad\ 3t \ - 2 \\ & \quad\ 3t \ - 2 \\ \hline & \qquad\ 0 \end{array}$$

よって，$x = t^2 + t$

〔または〕

$$x = \frac{1}{D^2-2D+3}(3t^2-t)$$
$$= \frac{1}{3\left(1-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right)}(3t^2-t)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left\{1-\left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2\right)\right\}}(3t^2-t)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2\right) + \left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2\right)^2 + \cdots\right\}(3t^2-t)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2+\frac{4}{9}D^2+\cdots\right)(3t^2-t)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}D+\frac{1}{9}D^2+\cdots\right)(3t^2-t)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(3t^2-t)+\frac{2}{3}(6t-1)+\frac{1}{9}\cdot 6\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{3t^2-t+4t-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(3t^2+3t) = t^2+t$$

（3）　特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ を解くと，$\lambda = 1,\ -2$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x = A\cos t + B\sin t$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = -A\sin t + B\cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\cos t - B\sin t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$-A\cos t - B\sin t + (-A\sin t + B\cos t) - 2(A\cos t + B\sin t) = 10\cos t$$

$$(-3A + B)\cos t + (-A - 3B)\sin t = 10\cos t$$

よって

$$\begin{cases} -3A + B = 10 \\ -A - 3B = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$A = -3$，$B = 1$

したがって，1 つの解は

$$x = -3\cos t + \sin t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = -3\cos t + \sin t + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2 + D - 2)x = 10\cos t$$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2 + D - 2}(10\cos t) \\ &= 10 \cdot \frac{1}{(D^2 - 2) + D}\cos t \\ &= 10 \cdot \frac{(D^2 - 2) - D}{(D^2 - 2)^2 - D^2}\cos t \\ &= 10 \cdot \frac{(-1 - 2) - D}{(-1 - 2)^2 - (-1)}\cos t \\ &= 10 \cdot \frac{-3 - D}{10}\cos t \\ &= (-3 - D)\cos t \\ &= -3\cos t + \sin t \end{aligned}$$

問 13

2 式を，上から①，②とする．

②より，$x = -\dfrac{dy}{dt} + \sin t \cdots$②$'$

②$'$ を t で微分すると，$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{d^2y}{dt^2} + \cos t$

これを，①に代入すると

$$-\frac{d^2y}{dt^2} + \cos t = 4y - \cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 2\cos t \cdots ③$$

③の特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ を解くと，$\lambda = \pm 2\,i$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$$

また，③の 1 つの解を，$y = A\cos t + B\sin t$ と予想すると

$$\frac{dy}{dt} = -A\sin t + B\cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A\cos t - B\sin t$$

これを③に代入すると

$$-A\cos t - B\sin t + 4(A\cos t + B\sin t) = 2\cos t$$

$$3A\cos t + 3B\sin t = 2\cos t$$

よって

$$\begin{cases} 3A = 2 \\ 3B = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$A = \dfrac{2}{3}$，$B = 0$

したがって，1 つの解は

$$y = \frac{2}{3}\cos t$$

よって，y の一般解は

$$y = \frac{2}{3}\cos t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$$

また，$\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2}{3}\sin t - 2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t$ であるから，これを ②$'$ に代入して

$$\begin{aligned} x &= -\left(-\frac{2}{3}\sin t - 2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t\right) + \sin t \\ &= \frac{5}{3}\sin t + 2C_1\sin 2t - 2C_2\cos 2t \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}\sin t + 2C_1\sin 2t - 2C_2\cos 2t} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{2}{3}\cos t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t} \end{cases}$$

（C_1，C_2は任意定数）

〔③の特殊解の求め方の別解〕（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2 + 4)x = 2\cos t$$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2 + 4}(2\cos t) \\ &= \frac{2}{D^2 + 4}\cos t \\ &= \frac{2}{(-1) + 4}\cos t \\ &= \frac{2}{3}\cos t \end{aligned}$$

問 14

（1）　両辺を t^2 で割ると

$$\frac{d^2t}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t^2}x = 0$$

$x = t^\alpha$ の形の解があると予想する．

$$\frac{dx}{dt} = \alpha t^{\alpha-1},\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\alpha(\alpha - 1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - t^\alpha = 0$$

$$\{\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1\}t^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 1)t^\alpha = 0$$

よって，$\alpha = \pm 1$

したがって，t と t^{-1} は与えられた微分方程式の解であり，かつ線形独立である．（問 3 より）

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1 t + C_2 t^{-1}} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

（2）　両辺を t^2 で割ると

$$\frac{d^2t}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{3}{t^2}x = 0$$

$x = t^\alpha$ の形の解があると予想する．

$$\frac{dx}{dt} = \alpha t^{\alpha-1},\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha}-3\alpha t^{\alpha}+3t^{\alpha}=0$$
$$\{\alpha(\alpha-1)-3\alpha+3\}t^{\alpha}=0$$
$$(\alpha^2-4\alpha+3)t^{\alpha}=0$$
$$(\alpha-3)(\alpha-1)t^{\alpha}=0$$

よって，$\alpha=3,\ 1$

したがって，t^3 と t は与えられた微分方程式の解であり，かつ線形独立である．

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=C_1t^3+C_2t} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

（3）　両辺を t^2 で割ると

$$\frac{d^2t}{dt^2}-\frac{3}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{4}{t^2}x=0$$

$x=t^{\alpha}$ の形の解があると予想する．

$$\frac{dx}{dt}=\alpha t^{\alpha-1},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha}-3\alpha t^{\alpha}+4t^{\alpha}=0$$
$$\{\alpha(\alpha-1)-3\alpha+4\}t^{\alpha}=0$$
$$(\alpha^2-4\alpha+4)t^{\alpha}=0$$
$$(\alpha-2)^2t^{\alpha}=0$$

よって，$\alpha=2$

したがって，t^2 は与えられた微分方程式の解であるから，$x=Ct^2$ も解である．（C は任意定数）

線形独立である 2 つの解を見つけるために，$x=ut^2$ とおく．（u は t の関数）

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}t^2+u\cdot(t^2)'$$
$$=\frac{du}{dt}t^2+2ut$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2u}{dt^2}t^2+2\frac{du}{dt}\cdot(t^2)'+u\cdot(t^2)''$$
$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^2+2\frac{du}{dt}\cdot 2t+u\cdot 2$$
$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^2+4\frac{du}{dt}t+2u$$

与えられた微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2u}{dt^2}t^4+4\frac{du}{dt}t^3+2ut^2-3\left(\frac{du}{dt}t^3+2ut^2\right)+4ut^2=0$$
$$\frac{d^2u}{dt^2}t+\frac{du}{dt}=0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right)=0$$

よって，$\dfrac{du}{dt}t=C_1$

$$\frac{du}{dt}=\frac{C_1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int\frac{C_1}{t}\,dt$$
$$u=C_1\log|t|+C_2$$

したがって，$x=t^2(C_1\log|t|+C_2)$ は解であり，かつ $t^2\log|t|$ と t^2 は線形独立である．

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=t^2(C_1\log|t|+C_2)} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

（4）　両辺を t^2 で割ると

$$\frac{d^2t}{dt^2}+\frac{3}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t^2}x=0$$

$x=t^{\alpha}$ の形の解があると予想する．

$$\frac{dx}{dt}=\alpha t^{\alpha-1},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha}+3\alpha t^{\alpha}+t^{\alpha}=0$$
$$\{\alpha(\alpha-1)+3\alpha+1\}t^{\alpha}=0$$
$$(\alpha^2+2\alpha+1)t^{\alpha}=0$$
$$(\alpha+1)^2t^{\alpha}=0$$

よって，$\alpha=-1$

したがって，t^{-1} は与えられた微分方程式の解であるから，$x=Ct^{-1}$ も解である．（C は任意定数）

線形独立である 2 つの解を見つけるために，$x=ut^{-1}$ とおく．（u は t の関数）

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}t^{-1}+u\cdot(t^{-1})'$$
$$=\frac{du}{dt}t^{-1}-ut^{-2}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}+2\frac{du}{dt}\cdot(t^{-1})'+u\cdot(t^{-1})''$$
$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}+2\frac{du}{dt}\cdot(-t^{-2})+u\cdot 2t^{-3}$$
$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}-2\frac{du}{dt}t^{-2}+2ut^{-3}$$

与えられた微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2u}{dt^2}t-2\frac{du}{dt}+2ut^{-1}$$
$$+3\left(\frac{du}{dt}-ut^{-1}\right)+ut^{-1}=0$$
$$\frac{d^2u}{dt^2}t+\frac{du}{dt}=0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right)=0$$

よって，$\dfrac{du}{dt}t=C_1$

$$\frac{du}{dt}=\frac{C_1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int\frac{C_1}{t}\,dt$$
$$u=C_1\log|t|+C_2$$

したがって，$x=t^{-1}(C_1\log|t|+C_2)$ は解であり，かつ $t^{-1}\log|t|$ と t^{-1} は線形独立である．

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=t^{-1}(C_1\log|t|+C_2)}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

問 15

（1）　$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$ であるから

$$\frac{dp}{dx}+p^2=0$$
$$\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}=-1$$

両辺を x について積分すると

$$\int\frac{1}{p^2}\,dp=-\int dx$$
$$-\frac{1}{p}=-x+c \quad (c\text{ は任意定数})$$
$$p=\frac{1}{x+C_1} \quad (-c=C_1)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+C_1}$$

両辺を x について積分すると

$$\int dy=\int\frac{1}{x+C_1}\,dx$$
$$\boldsymbol{y=\log|x+C_1|+C_2} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

（2）　$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$ であるから

$$\frac{dp}{dx}=\sqrt{1-p^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}=1$$

両辺を x について積分すると

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\,dp=\int dx$$

$$\sin^{-1}p=x+C_1 \quad (C_1\text{は任意定数})$$

$$p=\sin(x+C_1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin(x+C_1)$$

両辺を x について積分すると

$$\int dy=\int \sin(x+C_1)\,dx$$

$$\boldsymbol{y=-\cos(x+C_1)+C_2}$$

(C_1，C_2は任意定数)

問 16

$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$ であるから

$$\frac{dp}{dx}=1+p^2$$

$$\frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dx}=1$$

両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{1+p^2}\,dp=\int dx$$

$$\tan^{-1}p=x+C_1 \quad (C_1\text{は任意定数})$$

$$p=\tan(x+C_1)$$

$x=0$ のとき，$p=0$ であるから

$0=\tan(0+C_1)$，すなわち，$C_1=0$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\tan x$

両辺を x について積分すると

$$\int dy=\int \tan x\,dx$$

$$y=-\log|\cos x|+C_2$$

$x=0$ のとき，$y=1$ であるから

$1=-\log|\cos 0|+C_2$

$1=-\log 1+C_2$，すなわち，$C_2=1$

以上より，$\boldsymbol{y=-\log|\cos x|+1}$

∎